E.N.S.I. DE CHIMIE NORD option TB 1979

ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

DURÉE : 4 heures

N.B. — *Il n'est pas nécessaire d'avoir entièrement résolu la partie* I *pour aborder les parties* II *et* III. *Dans tout le problème, a désigne un réel strictement positif.*

I

1° Calculer les dérivées première et seconde de la fonction h définie par :

$$h(a) = \pi - \frac{a^2 - 2}{(a^2 + 2)^2}$$

et tracer la courbe représentative.

2° Étudier la fonction f définie par :

$$f(a) = \frac{a}{a^2 + 2} + \operatorname{tg} \pi a$$

on ne tracera pas la courbe représentative de f, mais on donnera l'allure du tableau de variation.

3° n désignant un entier strictement positif, établir que, dans chaque intervalle $\left]n - \frac{1}{2}, n + \frac{1}{2}\right[$, l'équation :

$$a \cos \pi a + (a^2 + 2) \sin \pi a = 0$$

admet une racine et une seule a_n. Admet-elle une racine dans l'intervalle $\left]0, \frac{1}{2}\right[$?

4° On pose :

$$a_n = n - t(n) \quad t(n) \in \left]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right[$$

Montrer que $t(n)$ tend vers 0 lorsque n augmente indéfiniment. Étudier la série de terme général $t(n)$. (On pourra considérer un équivalent de $t(n)$.)

.../...

II

λ désignant un paramètre réel, on se propose de rechercher s'il existe des fonctions y de la variable réelle x, non identiquement nulles, deux fois dérivables sur $[0; \pi]$ vérifiant simultanément l'équation différentielle :

(E) $$y'' - 2y' + (1 + \lambda)\, y = 0$$

et les conditions :

(C) $$\begin{cases} y'(0) = 2\, y(0) \\ y'(\pi) = 3\, y(\pi) \end{cases}$$

1° Étudier le cas $\lambda = 0$.

2° *Étude du cas* $\lambda > 0$. On posera $a = \sqrt{\lambda}$.

Former la condition que doit vérifier a pour que le problème ait des solutions.

Quelles sont les fonctions y correspondant à l'une des valeurs acceptables de a?

3° *Étude du cas* $\lambda < 0$. On posera $a = \sqrt{-\lambda}$.

Former la condition que doit vérifier a pour que le problème ait des solutions.

En écrivant cette condition sous la forme $g(a) = 0$ avec

$$g(a) = e^{2\pi a} - \varphi(a)$$

et en étudiant la fonction g indiquer le nombre de valeurs acceptables de a et indiquer les fonctions y correspondantes.

III

On effectue le changement de fonction défini par $y(x) = e^x \cdot z(x)$.

1° Former l'équation différentielle (E') et les conditions (C') vérifiées par la fonction z pour que Y' soit solution de (E) vérifiant (C).

2° λ_1 désignant l'une des valeurs de λ pour lesquelles le système $\{(E), (C)\}$ admet des solutions, on désigne par y_{λ_1}, celle de ces solutions qui prend, pour la valeur 0, la valeur $2\sqrt{|\lambda_1|}$, et par z_{λ_1} la fonction qui lui est associée par la relation $y_{\lambda_1}(x) = e^x \cdot z_{\lambda_1}(x)$.

Préciser cette solution dans chacun des cas étudiés au II.

3° Les notations restant les mêmes, λ_1 et λ_2 étant deux solutions distinctes de $\{(E)\,(C)\}$, montrer que :

$$(\lambda_1 - \lambda_2) \int_0^\pi e^{-2x}\, y_{\lambda_1}(x) \cdot y_{\lambda_2}(x)\, dx =$$

$$\int_0^\pi [z''_{\lambda_2}(x)\, z_{\lambda_1}(x) - z''_{\lambda_1}(x)\, z_{\lambda_2}(x)]\, dx.$$

En déduire la valeur de

$$J = \int_0^\pi e^{-2x}\, y_{\lambda_1}(x) \cdot y_{\lambda_2}(x)\, dx.$$

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail